MỤC LỤC

A. MỞ ĐẦU

I. Lời nói đầu

Trong môn toán ở trường phổ thông phần hình học không gian giữ một vai trò, vị trí hết sức quan trọng. Ngoài việc cung cấp cho học sinh kiến thức, kĩ năng giải toán hình học không gian, còn rèn luyện cho học sinh đức tính, phẩm chất của con người lao động mới: cẩn thận, chính xác, có tính kỉ luật, tính phê phán, tính sáng tạo, bồi dưỡng óc thẩm mĩ, tư duy sáng tạo cho học sinh.

Tuy nhiên trong quá trình giảng dạy tôi nhận thấy học sinh lớp 11 rất e ngại học môn hình học không gian vì các em nghĩ rằng nó trừu tượng, thiếu tính thực tế. Chính vì thế mà có rất nhiều học sinh học yếu môn học này, về phần giáo viên cũng gặp không ít khó khăn khi truyền đạt nội dung kiến thức và phương pháp giải các dạng bài tập hình học không gian.

Hình học không gian là một phần rất quan trọng trong nội dung thi đại học của Bộ giáo dục, nếu học sinh không nắm kỹ bài thì các em sẽ gặp nhiều lúng túng khi làm hai câu trong về hình học không gian trong đề thi đại học.

Qua nhiều năm giảng dạy môn học này tôi cũng đúc kết được một số kinh nghiệm nhằm giúp các em tiếp thu kiến thức được tốt hơn, từ đó mà chất lượng giảng dạy cũng như học tập của học sinh ngày được nâng lên. Do đây là phần nội dung kiến thức mới nên nhiều học sinh còn chưa quen với tính tư duy trừu tượng của nó, nên tôi nghiên cứu nội dung này nhằm tìm ra những phương pháp truyền đạt phù hợp với học sinh, bên cạnh cũng nhằm tháo gỡ những vướng mắc, khó khăn mà học sinh thường gặp phải với mong muốn nâng dần chất lượng giảng dạy nói chung và môn hình học không gian nói riêng.

Từ lý do trên tôi đã khai thác, hệ thống hóa các kiến thức, tổng hợp các phương pháp thành một chuyên đề: "***Các dạng Toán về quan hệ vuông góc trong không gian*** "

II. Cơ sở lý thuyết

2.1. Các định nghĩa

+) ***Định nghĩa 1***: Hai đường thẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0. $a \perp b \Leftrightarrow (a,b) = 90^0$

+) ***Định nghĩa 2***: Một đường thẳng được gọi là vuông góc với mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó. $a \perp (\alpha) \Leftrightarrow \forall b \subset (\alpha): a \perp b$

+) ***Định nghĩa 3***: Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0. $(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow ((\alpha),(\beta)) = 90^0$.

+) Định nghĩa 4: Góc giữa hai đường thẳng a và b là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song (hoặc trùng) với a và b.

+) ***Định nghĩa 5***:

. Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (α) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) bằng 90^0.

. Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (α) thì góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên mặt phẳng (α) gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α).

+) ***Định nghĩa 6***: Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

+) ***Định nghĩa 7***: Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α) (hoặc đến đường thẳng Δ) là khoảng cách giữa hai điểm M và H, trong đó H là hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (α) (trên đường thẳng Δ).

+) ***Định nghĩa 8***: Khoảng cách giữa đường thẳng a đến mặt phẳng (α) song song với a là khoảng cách từ một điểm nào đó của a đến mặt phẳng (α).

+) ***Định nghĩa 9***: Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kỳ của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

+) ***Định nghĩa 10***: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

2.2. Các định lý thường được sử dụng

Định lý 1: $\left.\begin{matrix} a\cap b \\ a,b\subset (P) \\ d\perp a, d\perp b \end{matrix}\right\}\Rightarrow d\perp (P)$

Định lý 2: $\left.\begin{matrix} a\subset (P) \\ d\perp (P) \\ \forall a\subset (P) \end{matrix}\right\}\Rightarrow d\perp a$

Định lý 3: + $\left.\begin{matrix} d\perp (P) \\ d'//d \end{matrix}\right\}\Rightarrow d'\perp (P)$

+ $\left.\begin{matrix} (P)//(Q) \\ d\perp (P) \end{matrix}\right\}\Rightarrow d\perp (Q)$

+ $\left.\begin{matrix} d//(P) \\ d'\perp (P) \end{matrix}\right\}\Rightarrow d'\perp d$

Định lý 4: $\left.\begin{matrix} d\perp (P) \\ d\subset (Q) \end{matrix}\right\}\Rightarrow (P)\perp (Q)$

Định lý 5: $\left.\begin{matrix} (P)\perp (Q) \\ (P)\cap (Q)=\Delta \\ d\subset (P) \\ d\perp \Delta \end{matrix}\right\}\Rightarrow d\perp (Q)$

Định lý 6: $\left.\begin{matrix} (P)\cap (Q)=\Delta \\ (P)\perp (R) \\ (Q)\perp (R) \end{matrix}\right\}\Rightarrow \Delta\perp (R)$

B. NỘI DUNG

I. Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng, đường thẳng vuông góc với đường thẳng, mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng.

1.1. Dạng 1: Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

1.1.1. Phương pháp: *Ta thường vận dụng định lý 1 để chứng minh. Hoặc sử dụng định lý 3, định lý 5, định lý 6 trong một số trường hợp đặc biệt*

1.1.2. Các ví dụ mẫu:

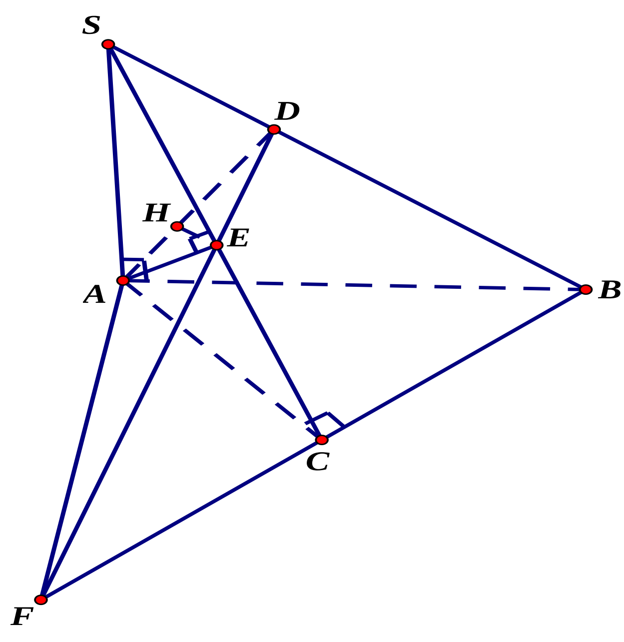
Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giácvvuông tại C, $SA \perp (ABC)$

a) Chứng minh rằng: $BC \perp (SAC)$

b) Gọi E là hình chiếu vuông góc của A trên SC. Chứng minh rằng: $AE \perp (SBC)$

c) Gọi mp(P) đi qua AE và vuông góc với (SAB), cắt SB tại D. Chứng minh rằng: $SB \perp (P)$

d) Đường thẳng DE cắt BC tại F. Chứng minh rằng: $AF \perp (SAB)$



Giải: a) Ta có: $BC \perp AC \quad (gt) \quad (1)$

Mặt khác, vì

$$\left.\begin{array}{l} SA \perp (ABC) \\ BC \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow SA \perp BC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $BC \perp (SAB)$

b) Ta có: $AE \perp SC$ (3) (gt)

Theo a) $BC \perp (SAB) \Rightarrow AE \perp BC$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra: $AE \perp (SBC)$

c) Ta thấy: $(P) \equiv (ADE)$

Theo b) $AE \perp (SBC) \Rightarrow BC \perp AE$ (5)

Trong mp(ADE) kẻ $EH \perp AD, H \in AD$. Vì

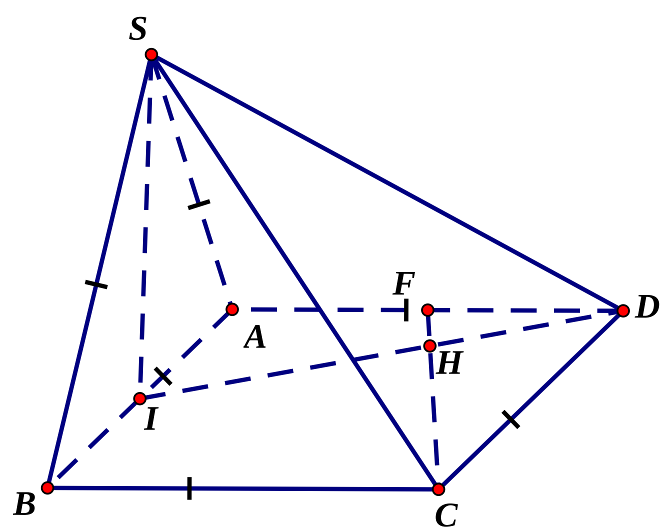
$$\left.\begin{array}{l} (ADE) \perp (SAB) \\ (ADE) \cap (SAB) = AD \\ EH \perp AD \end{array}\right\} \Rightarrow EH \perp (SAB) \Rightarrow SB \perp EH \quad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra: $SB \perp (ADE)$ hay $SB \perp (P)$

d) Từ $\left.\begin{array}{l} SA \perp (ABC) \\ AF \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow AF \perp SA \quad (7)$

Theo c) $SB \perp (ADE) \Rightarrow AF \perp SB \quad (8)$. Từ (7) và (8) suy ra: $AF \perp (SAB)$

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông, tam giác SAB là tam giác đều, $(SAB) \perp (ABCD)$. Gọi I, F lần lượt là trung điểm của AB và AD. Chứng minh rằng: $FC \perp (SID)$

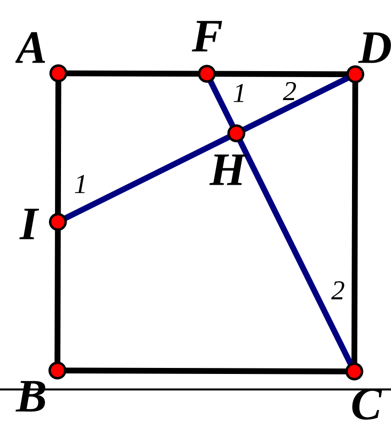


Giải: Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} SI \perp AB \\ (SAB) \perp (ABCD) \\ SI \subset (SAB) \end{array}\right\} \Rightarrow SI \perp (ABCD)$$

$\Rightarrow SI \perp CF \quad (1)$

Mặt khác, xét hai tam giác vuông ADI và DFC có: AI=DF, AD=DC. Do đó, $\Delta AID = \Delta DFC$ từ đó ta có:



$$\left.\begin{array}{l} I_1 = F_1 \\ D_2 = C_2 \\ I_1 + D_2 = 90^0 \end{array}\right\} \Rightarrow F_1 + D_2 = 90^0$$

$\Rightarrow FHD = 90^0$

Hay $CF \perp ID$ (2)

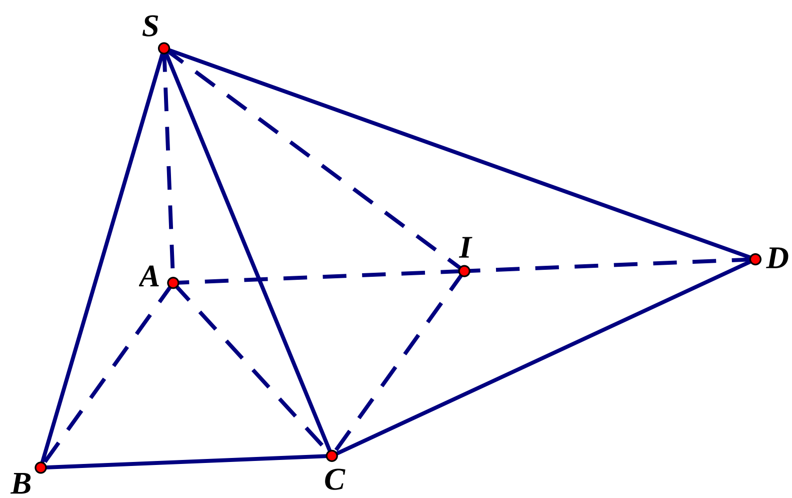
Từ (1) và (2) suy ra: $FC \perp (SID)$

1.2. Dạng 2: Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

***1.2.1. Phương pháp**: Ta thường sử dụng định lý 2 hoặc là các cách chứng minh vuông góc có trong hình học phẳng*

1.2.2. Các ví dụ mẫu:

Ví dụ 1: (D-2007) Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B, $SA \perp (ABCD)$, AD=2a, AB=BC=a. Chứng minh rằng: tam giác SCD vuông



Giải: Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} SA \perp (ABCD) \\ CD \subset (ABCD) \end{array}\right\} \Rightarrow SA \perp CD (1)$$

+ Gọi I là trung điểm của AD. Tứ giác ABCI là hình vuông. Do đó, $ACI = 45^0$ (*). Mặt khác, ΔCID là tam giác vuông cân tại I nên: $BCI = 45^0$ (*).

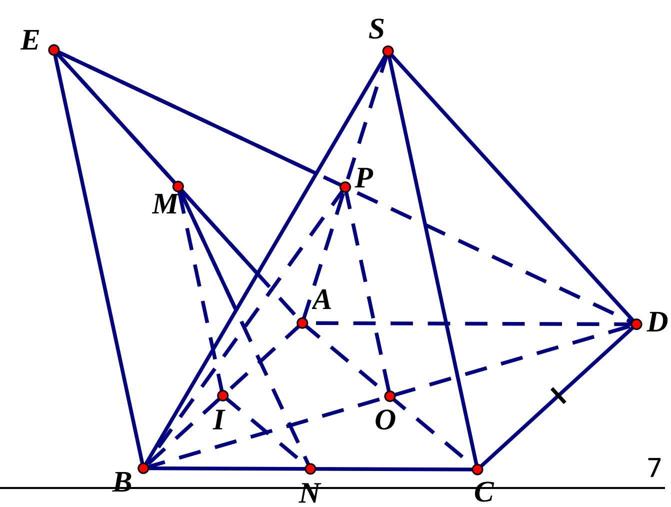
Từ (*) và (**) suy ra: $ACD = 90^0$ hay $AC \perp CD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $CD \perp (SAC) \Rightarrow CD \perp SC$ hay ΔSCD vuông tại C

Ví dụ 2: (B-2007) Cho hình chóp đều S.ABCD đáy ABCD là hình vuông, E là điểm đối xứng của D qua trung điểm SA. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AE và BC. CMR: $MN \perp BD$

Giải: Gọi I, P lần lượt là trung điểm của AB và SA, O là giao điểm của AC và BD.

Ta có: $\left.\begin{array}{l} IN // AC \\ AC \perp BD \end{array}\right\} \Rightarrow BD \perp IN (1)$



Mặt khác, $\left.\begin{array}{l} IM//BE \\ BE//PO \end{array}\right\} \Rightarrow IM//PO(*)$

Mà $PO \perp BD(**)$ (vì: BPD là tam giác cân tại P và O là trung điểm của BD)

Từ (*) và (**) ta có: $BD \perp IM\,(2)$

Từ (1) và (2) ta có: $BD \perp (IMN) \Rightarrow BD \perp MN$

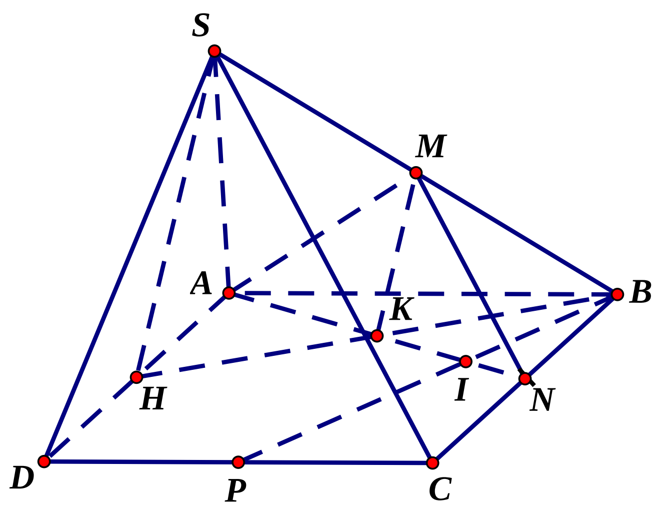
Các điểm cần chú ý khi giải ví dụ 2:

+ Chọn mp(IMN) với I là trung điểm của AB (vì $BD \perp AC$ nên chọn mp chứa MN và vuông góc với BD là mp(IMN))

+ Sử dụng các giả thiết trung điểm để chứng minh song song.

+ Sử dụng định lý: $\left.\begin{array}{l} a//b \\ a \perp c \end{array}\right\} \Rightarrow b \perp c$

Ví dụ 3: (A-2007) Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình vuông, tam giác SAD đều, $(SAD) \perp (ABCD)$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, BC và CD. Chứng minh rằng: $AM \perp BP$



Giải: Gọi I là giao điểm của AN và BP, H là trung điểm của AD, K là giao điểm của AN và BH.

Xét hai tam giác vuông ABN và BCP có: AB=BC, BN=CP. Suy ra, $\Delta ABN = \Delta BCP$

$\Rightarrow BAN = CBP, ANB = BPC$ mà

$BAN + ANB = 90^0 \Rightarrow CBP + ANB = 90^0$ hay $AN \perp BP$ (1)

Vì ΔSAD đều nên: $\left.\begin{array}{l} SH \perp AD \\ (SAD) \perp (ABCD) \\ BP \subset (ABCD) \end{array}\right\} \Rightarrow SH \perp BP(*)$.

Mặt khác, tứ giác ABNH là hình chử nhật nên K là trung điểm của HB hay $MK//SH(**)$

Từ $(*)$ và $(**)$ suy ra: $BP \perp MH(2)$

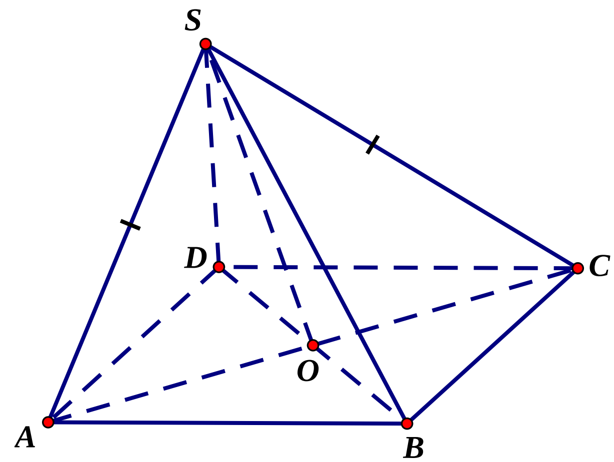
Từ (1), (2) suy ra: $BP \perp (AMN) \Rightarrow BP \perp AM$

1.3. Dạng 3: Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

***1.3.1. Phương pháp**: Sử dụng định lý 3*

1.3.2.Các ví dụ mẫu:

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình thoi , SA=SC. Chứng minh rằng: $(SBD) \perp (ABCD)$



Giải:+ Ta có: $AC \perp BD\,(1)$ (*giả thiết*)

+ Mặt khác, $SO \perp AC\,(2)$ (*SAC là tam giác cân tại A và O là trung điểm của AC nên SO là đường cao của tam giác*)

+ Từ (1) và (2) suy ra: $AC \perp (SBD)$ mà $AC \subset (ABCD)$ nên $(SBD) \perp (ABCD)$

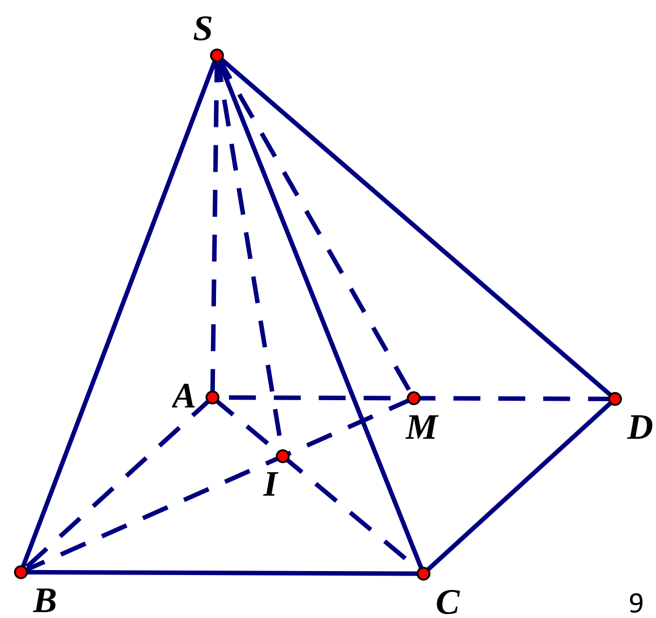
Ví dụ 2: (B-2006) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, AB=a, $AD = a\sqrt{2}$, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của AD, I là giao điểm của AC và BM. Chứng minh rằng: $(SAC) \perp (SMB)$

Giải:

+ Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BM$ (1).

+ Xét tam giác vuông ABM có:

$\tan AMB = \dfrac{AB}{AM} = \sqrt{2}$. Xét tam giác vuông



ACD có: $\tan CAD = \frac{CD}{AD} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ta có: $\cot AIM = \cot(180^0 - (AMB + CAD)) = \\ = \cot(AMB + CAD) = 0 \\ \Rightarrow AIM = 90^0$

Hay $BM \perp AC$ (2).

+ Từ (1) và (2) suy ra: $BM \perp (SAC)$ mà $BM \subset (SAC)$ nên $(SAC) \perp (SMB)$

1.4. Bài tập:

Bài tập 1: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Gọi I là trung điểm của BC, D là điểm đối xứng với A qua I, $SD \perp (ABC), SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Chứng minh rằng:

a) $(SBC) \perp (SAD)$

b) $(SAB) \perp (SAC)$

Bài tập 2: Cho hình chóp SABCD, có đáy là hình vuông tâm O. SA ⊥ (ABCD). Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC, SD.

a) CMR: BC ⊥ (SAB), CD ⊥ (SAD), BD ⊥ (SAC).

b) CMR: AH, AK cùng vuông góc với SC. Từ đó suy ra 3 đường thẳng AH, AI, AK cùng nằm trong một mặt phẳng.

c) CMR: HK ⊥ (SAC). Từ đó suy ra HK ⊥ AI.

Bài tập 3: Cho tứ diện SABC có tam giác ABC vuông tại B; SA ⊥ (ABC).

a) Chứng minh: BC ⊥ (SAB).

b) Gọi AH là đường cao của ΔSAB. Chứng minh: AH ⊥ SC.

Bài tập 4: Cho hình chóp SABCD, có đáy ABCD là hình thoi tâm O. Biết: SA = SC, SB = SD.

a) Chứng minh: SO ⊥ (ABCD).

b) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh BA, BC. CMR: IJ $\perp$ (SBD).

Bài tập 5: Cho tứ diện ABCD có ABC và DBC là 2 tam giác đều. Gọi I là trung điểm của BC.

a) Chứng minh: BC $\perp$ (AID).

b) Vẽ đường cao AH của ΔAID. Chứng minh: AH $\perp$ (BCD).

Bài tập 6: Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên mp(ABC). Chứng minh rằng:

a) BC $\perp$ (OAH).

b) H là trực tâm của tam giác ABC.

c) $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

d) Các góc của tam giác ABC đều nhọn.

Bài tập 7: Cho hình chóp SABCD, có đáy là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác đều; SAD là tam giác vuông cân đỉnh S. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Tính các cạnh của ΔSIJ và chứng minh rằng SI $\perp$ (SCD), SJ $\perp$ (SAB).

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên IJ. CMR: SH $\perp$ AC.

c) Gọi M là một điểm thuộc đường thẳng CD sao cho: BM $\perp$ SA. Tính AM theo a.

Bài tập 8: Cho hình chóp SABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và SC = a$\sqrt{2}$. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD.

a) CMR: SH $\perp$ (ABCD).

b) Chứng minh: AC $\perp$ SK và CK $\perp$ SD.

Bài tập 9: Cho hình chóp SABCD, có đáy là hình chữ nhật có AB = a, BC = $a\sqrt{3}$, mặt bên SBC vuông tại B, mặt bên SCD vuông tại D có SD = $a\sqrt{5}$.

a) Chứng minh: $SA \perp (ABCD)$ và tính SA.

b) Đường thẳng qua A và vuông góc với AC, cắt các đường thẳng CB, CD lần lượt tại I, J. Gọi H là hình chiếu của A trên SC. Hãy xác định các giao điểm K, L của SB, SD với mp(HIJ). CMR: $AK \perp (SBC)$, $AL \perp (SCD)$.

c) Tính diện tích tứ giác AKHL.

Bài tập 10: Gọi I là 1 điểm bất kì ở trong đường tròn (O;R). CD là dây cung của (O) qua I. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn (O) tại I ta lấy điểm S với OS = R. Gọi E là điểm đối tâm của D trên đường tròn (O). Chứng minh rằng:

a) Tam giác SDE vuông tại S.

b) $SD \perp CE$.

c) Tam giác SCD vuông.

Bài tập 11: Cho ΔMAB vuông tại M ở trong mặt phẳng (P). Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại A ta lấy 2 điểm C, D ở hai bên điểm A. Gọi C′ là hình chiếu của C trên MD, H là giao điểm của AM và CC′.

a) Chứng minh: $CC' \perp (MBD)$.

b) Gọi K là hình chiếu của H trên AB. CMR: K là trực tâm của ΔBCD.

Bài tập 12: Cho tam giác đều ABC, cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC. Trên đường thẳng vuông góc vơi mp(ABC) tại D lấy điểm S sao cho SD = $a\sqrt{6}$. Chứng minh hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) vuông góc với nhau.

Bài tập 13: Cho hình tứ diện ABCD có hai mặt (ABC) và (ABD) cùng vuông góc với đáy (DBC). Vẽ các đường cao BE, DF của ΔBCD, đường cao DK của ΔACD.

a) Chứng minh: $AB \perp (BCD)$.

b) Chứng minh 2 mặt phẳng (ABE) và (DFK) cùng vuông góc với mp(ADC).

c) Gọi O và H lần lượt là trực tâm của 2 tam giác BCD và ADC. CMR: OH $\perp$ (ADC).

Bài tập 14: Cho hình chóp SABCD, đáy ABCD là hình vuông, SA $\perp$ (ABCD).

a) Chứng minh (SAC) $\perp$ (SBD).

b) Gọi BE, DF là hai đường cao của ΔSBD. CMR: (ACF) $\perp$ (SBC), (AEF) $\perp$ (SAC).

Bài tập 15: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA $\perp$ (ABCD). Gọi M, N là 2 điểm lần lượt ở trên 2 cạnh BC, DC sao cho BM = $\frac{a}{2}$, DN = $\frac{3a}{4}$. Chứng minh 2 mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau.

Bài tập 16: Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ BB′ và CC′ cùng vuông góc với mp(ABC).

a) Chứng minh (ABB′) $\perp$ (ACC′).

b) Gọi AH, AK là các đường cao của ΔABC và ΔAB′C′. Chứng minh 2 mặt phẳng (BCC′B′) và (AB′C′) cùng vuông góc với mặt phẳng (AHK).

Bài tập 17: Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = c, AC = b. Gọi (P) là mặt phẳng qua BC và vuông góc với mp(ABC); S là 1 điểm di động trên (P) sao cho SABC là hình chóp có 2 mặt bên SAB, SAC hợp với đáy ABC hai góc có số đo lần lượt là α và $\frac{\pi}{2}-\alpha$. Gọi H, I, J lần lượt là hình chiếu vuông góc của S trên BC, AB, AC..

a) Chứng minh rằng: $SH^2 = HI.HJ$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của SH và khi đó hãy tìm giá trị của α.

Bài tập 18: Cho hình tứ diện ABCD có AB = BC = a, AC = b, DB = DC = x, AD = y. Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, x, y để:

a) Mặt phẳng (ABC) $\perp$ (BCD).

b) Mặt phẳng (ABC) ⊥ (ACD).

Bài tập 19: Cho hình chóp SABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA ⊥ (ABCD) ; M và N là hai điểm nằm trên các cạnh BC, CD. Đặt BM = x, DN = y.

a) Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau là MN ⊥ (SAM). Từ đó suy ra hệ thức liên hệ giữa x và y.

b) Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để góc giữa hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) có số đo bằng 30^0 là $a(x + y) + \sqrt{3}xy = a^2\sqrt{3}$.

Bài tập 20: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm I cạnh a và có góc A bằng 60^0, cạnh $SC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ và SC ⊥ (ABCD).

a) Chứng minh (SBD) ⊥ (SAC).

b) Trong tam giác SCA kẻ IK ⊥ SA tại K. Tính độ dài IK.

c) Chứng minh $BKD = 90^0$ và từ đó suy ra (SAB) ⊥ (SAD).

II. Các dạng toán về góc

2.1. Dạng 1: Góc giữa hai đường thẳng

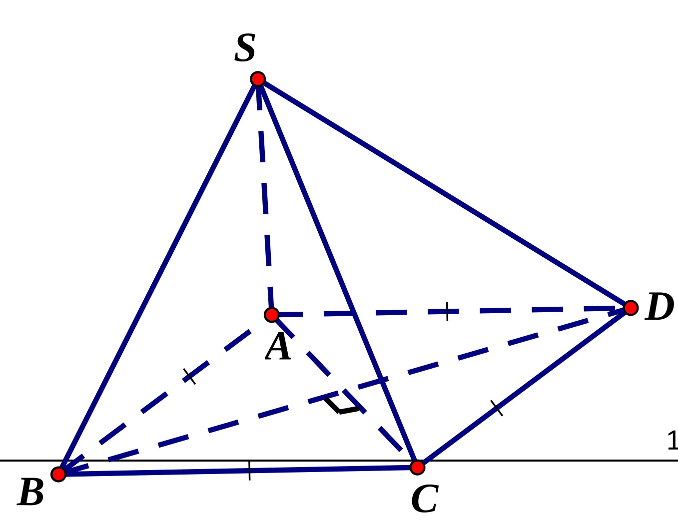
2.1.1. Phương pháp xác định góc giữa hai đường thẳng a và b chéo nhau

Cách 1: (a,b)=(a',b') trong đó a', b' là hai đường thẳng cắt nhau và lần lượt song song với a và b. Tức là, chọn ra hai đường thẳng cắt nhau và lần lượt song song với a và b

Cách 2: (a,b)=(a,b') trong đó b' là đường thẳng cắt đường thẳng a và song song với b. Tức là chọn trên a (hoặc b) một điểm A rồi từ đó chọn một đường thẳng qua A và song song với b (hoặc a)

***) Chú ý:** Các định lý hay sử dụng

2.1.2. Các ví dụ mẫu:



Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh a, $SA = a\sqrt{3}, SA \perp BC$. Tính góc giữa hai đường thẳng SD và BC?

Giải: Ta có: BC//AD và $\left.\begin{matrix} BC // AD \\ SA \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow SAD = 90^0$. Do đó,

$(SD, BC) = (SD, AD) = SDA$.

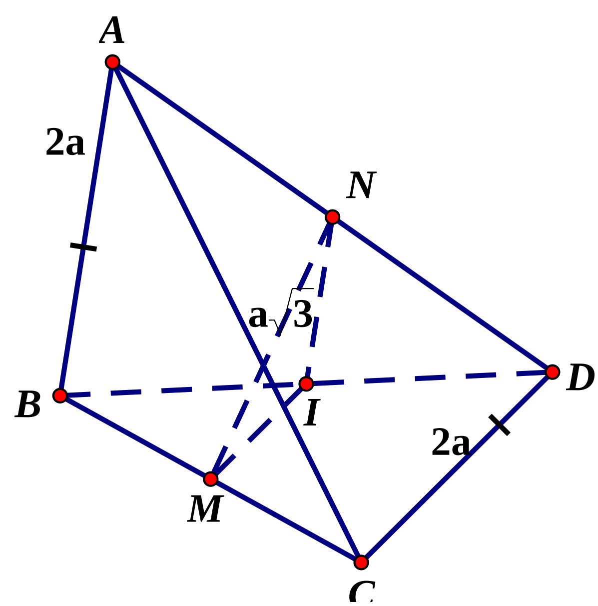
Xét tam giác vSAD vuông tại A ta có: $\tan SDA = \dfrac{SA}{AD} = \sqrt{3} \Rightarrow SDA = 60^0$

Vậy góc giữa hai đường thẳng SD và BC bằng 60^0

Ví dụ 2: Cho tứ diện ABCD có AB=CD=2a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD, $MN = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD?

Giải: Gọi I là trung điểm của BD. Ta có:

$\left.\begin{matrix} IN // AC \\ IM // CD \end{matrix}\right\} \Rightarrow (AB, CD) = (IM, IN)$.



Xét tam giác IMN có:

$IM = IN = a, MN = a\sqrt{3}$. Do đó,

$\cos MIN = \dfrac{2a^2 - 3a^2}{2a^2} = -\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow MIN = 120^0$

Vậy: $(AB, CD) = 180^0 - 120^0 = 60^0$

Các điểm cần chú ý khi giải ví dụ 2:

+ Việc tìm góc giữa hai đường thẳng AB và CD thông qua góc giữa hai đường thẳng IM và IN nhờ vào giả thiết $MN = a\sqrt{3}$

+ Một số em đồng nhất $(IM, IN) = MIN$ là chưa chính xác mà $(IM, IN) = \left[\begin{matrix} MIN \\ 180^0 - MIN \end{matrix}\right.$.

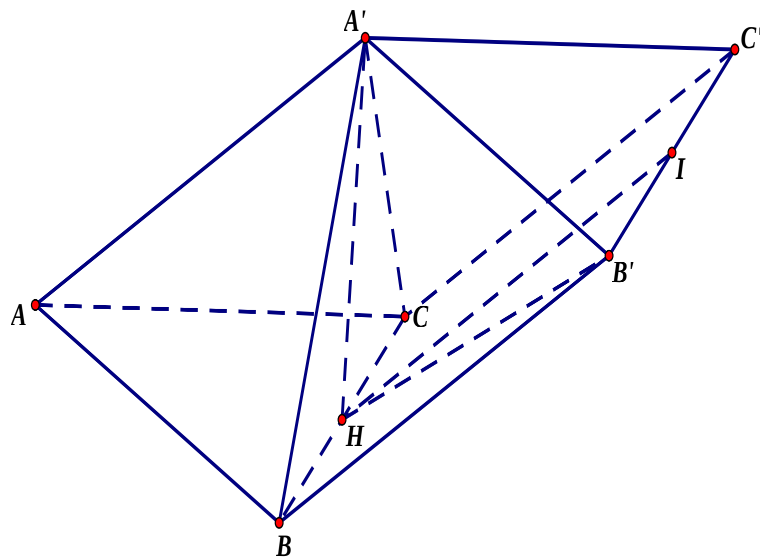
Đến đây ta có thể giải quết theo hai hướng:

- Chứng minh góc $MIN > 90^0$

- Tính ra cụ thể góc MIN rồi sau đó dựa vào giá trị của góc MIN để kết luận về giá trị của góc giữa hai đường thẳng AB và CD

Ví dụ 3: (A-2008) Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a, AC = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mp(ABC) là trung điểm của BC. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA' và B'C'?

Giải: Gọi H là trung điểm của BC



Ta có:

$$\left.\begin{matrix} AA'//BB' \\ B'C'//BD \end{matrix}\right\} \Rightarrow (AA', B'C') =$$

$$= (BB', BD)$$

Hay,

$$\cos(AA', B'C') = \cos(BB', BD) =$$

$$= \left|\cos HBB'\right|$$

Xét tam giác A'B'H có

$A' = 90^0, A'B' = a$,

$$A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} =$$

$$= \sqrt{AA'^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = a\sqrt{3}, \quad HB' = \sqrt{A'H^2 + A'B'^2} = 2a.$$

Do đó, $\cos HBB' = \dfrac{BH^2 + BB'^2 - HB'^2}{2.BH.BB'} = \dfrac{1}{4}$

Vậy $\cos(AA', B'C') = \left|\cos HBB'\right| = \dfrac{1}{4}$

Các điểm cần chú ý khi giải ví dụ 3:

+ Áp dụng cách 1 để giải bài toán này

+ Điểm mấu chốt của bài toán này là tìm ra được độ dài của HB’ thông qua nhận xét A’H vuông góc với mp(A’B’C’)

2.2. Dạng 2: Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

2.2.1.Phương pháp xác định góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P)

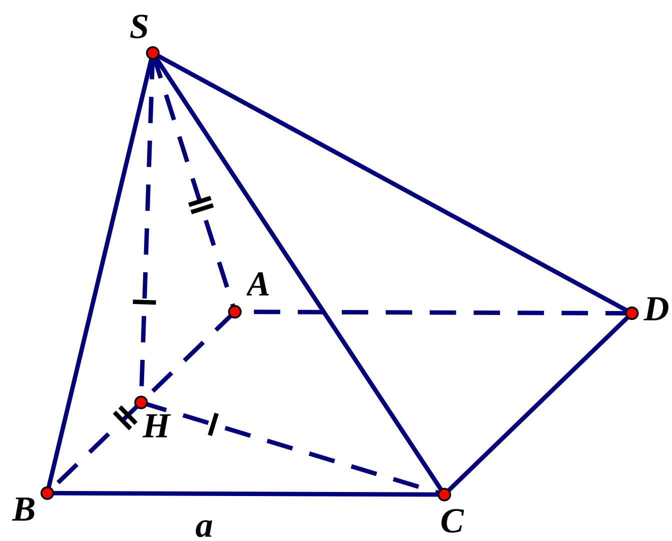
+ Tìm $I = d \cap (P)$

+ Tìm A thuộc d kẻ AH vuông góc với (P)

+ $(d,(P)) = AIH$

2.2.2.Các ví dụ mẫu:

Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $(SAB) \perp (ABCD)$, H là trung điểm của AB, SH=HC, SA=AB. Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABCD)



Giải: + Ta có: $AH = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}$,

$SA = AB = a$,

$SH = HC = \sqrt{BH^2 + BC^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

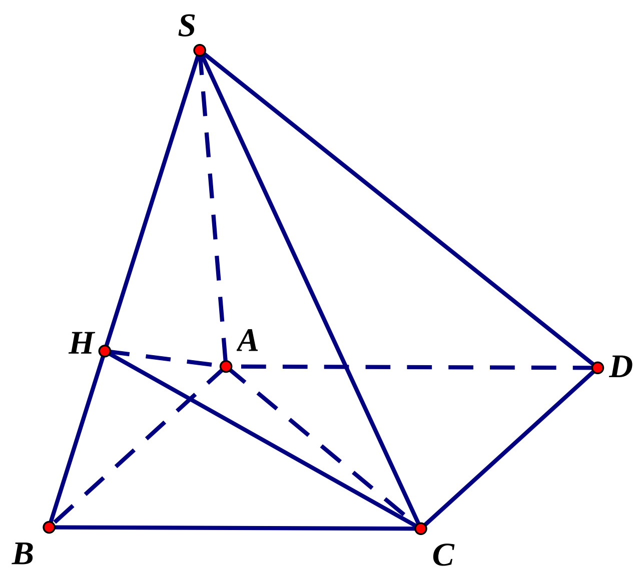
Vì $SA^2 + AH^2 = \frac{5a^2}{4} = AH^2$ nên tam giác SAH vuông tại A hay $SA \perp AB$ mà $(SAB) \perp (ABCD)$. Do đó, $SA \perp (ABCD)$ và AC là hình chiếu vuông góc của SC lên mp(ABCD).

+ Ta có: $(SC,(ABCD)) = SCA$, $\tan SCA = \frac{SA}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Vậy góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABCD) là góc có tang bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = a\sqrt{6}$. Tính sin của góc giữa:

a) SC và (SAB)
b) AC và (SBC)

Giải:



a) Ta có: $BC \perp AB$ (gt) và $SA \perp BC$ (vì $SA \perp (ABCD)$) $\Rightarrow BC \perp (SAB)$ do đó: SB là hình chiếu vuông góc của SC trên mp(SAB) $\Rightarrow (SC,(SAB)) = BSC$.
Ta có:
$\Rightarrow \sin(SC,(SAB)) = \sin BSC =$
$= \dfrac{BC}{SC} = \dfrac{a}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

b) + Trong mp(SAB) kẻ $AH \perp SB$ ($H \in SB$). Theo a) $BC \perp (SAB) \Rightarrow AH \perp BC$ nên $AH \perp (SBC)$ hay CH là hình chiếu vuông góc của AC trên mp(SBC)
$\Rightarrow (AC,(SBC)) = ACH$.

+ Xét tam giác vuông SAB có: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{7}{6a^2} \Rightarrow AH = a.\sqrt{\dfrac{6}{7}}$

+ Vậy $\sin(AC,(SBC)) = \sin ACH = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$

2.3. Dạng 3: Góc giữa hai mặt phẳng

2.3.1.Phương pháp xác định góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau (P) và (Q)

+ Tìm giao tuyến $(P) \cap (Q) = \Delta$

+ Trong (P) tìm a vuông góc với Δ, trong (Q) tìm b vuông góc với Δ và a,b cắt nhau tại I

+ ((P),(Q))=(a,b)

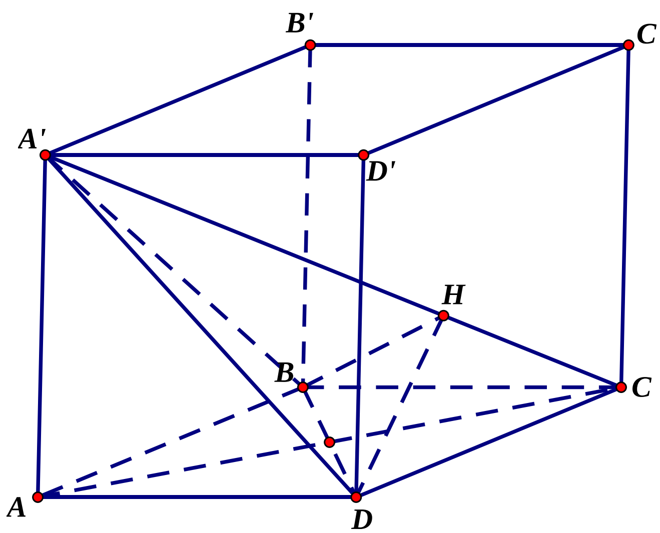
Chú ý: *Trong một số trường hợp nếu chỉ yêu cầu tính góc giữa hai mặt phẳng thì chúng ta có thể áp dụng công thức hình chiếu để tính.*

Công thức hình chiếu: Gọi hình (H) có diện tích S; hình (H') là hình chiếu của (H) trên mặt phẳng (α) có diện tích S'; φ là góc giữa mặt phẳng chứa (H) và mp(α). Lúc đó, ta có công thức sau: $S' = S.\cos\varphi$

2.3.2. Các ví dụ mẫu

Ví dụ 1: Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a.

Tính số đo của góc giữa (BA'C) và (DA'C)



Giải: + Kẻ $BH \perp A'C,\ (H \in A'C)(1)$

+ Mặt khác, ta có: $BD \perp AC$ (gt),

$AA' \perp (ABCD) \Rightarrow AA' \perp BD$

$\Rightarrow BD \perp (ACA') \Rightarrow BD \perp A'C$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$A'C \perp (BDH) \Rightarrow A'C \perp DH$. Do đó,

$((BA'C),(DA'C)) = (HB,HD)$.

+ Xét tam giác vuông BCA' có:

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{BA'^2} = \frac{3}{2a^2}$$

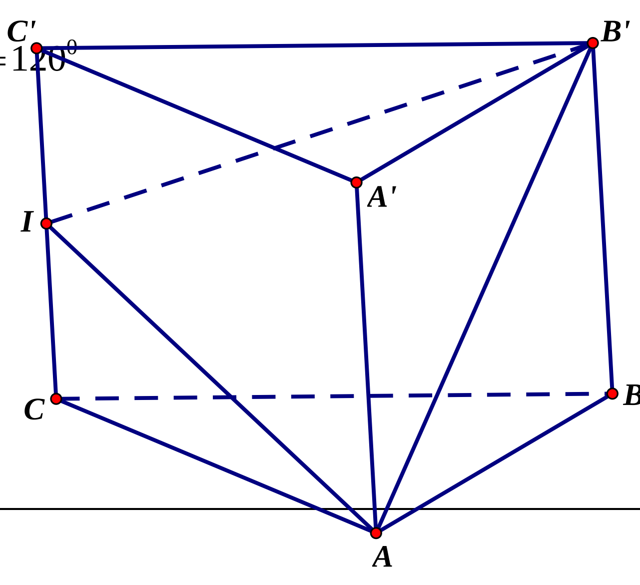
$$\Rightarrow BH = a.\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow DH = a.\sqrt{\frac{2}{3}}$$

+ Ta có:

$$\cos BHD = \frac{2BH^2 - BD^2}{2BH^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow BHD = 120^0$$

. Vậy $((BA'C),(DA'C)) = 60^0$

Ví dụ 2: Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C', đáy ABC là tam giác cân AB=AC=a, $BAC = 120^0$, BB'=a, I là



trung điểm của CC’. Tính cosin của góc giữa hai mp(ABC) và (AB’I).

Giải: + Ta thấy tam giác ABC là hình chiếu vuông góc của tam giác AB’I lên mặt phẳng (ABC). Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (AB’I). Theo công thức hình chiếu ta có: $\cos\varphi = \dfrac{S_{ABC}}{S_{AB'I}}$.

+ Ta có: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}.AB.AC.\sin 120^0 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$AI = \sqrt{AC^2 + CI^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2},\ AB' = \sqrt{AB^2 + BB'^2} = a\sqrt{2},\ IB' = \sqrt{B'C'^2 + IC'^2} = \dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.

Suy ra: Tam giác AB’I vuông tại A nên $S_{AB'I} = \dfrac{1}{2}.AB'.AI = \dfrac{a^2\sqrt{10}}{4}$.

Vậy $\cos\varphi = \dfrac{S_{ABC}}{S_{AB'I}} = \sqrt{\dfrac{3}{10}}$

2.4. Bài tập

Bài tập 1: (B-2008) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng 2a, $SA = a, SB = a\sqrt{3}, (SAB) \perp (ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM và DN?

Bài tập 2: Cho hình chóp đều S.ABC cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$. Tính góc giữa SA và mp(ABC)

Bài tập 3: Cho hình chóp S.ABC, $SA \perp (ABC)$

a) Xác định góc giữa (ABC) và (SBC)

b) Giả sử tam giác ABC vuông tại B xác định góc giữa hai mp (ABC) và (SBC)

Bài tập 4: Cho hình chóp tứ giác đều S. ABCD đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA=SB=SC=SD=a. Tính cosin của góc giữa (SAB) và (SAD).

Bài tập 5: Cho hình chóp SABCD, có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O; SO ⊥ (ABCD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và BC. Biết $(MN,(ABCD))=60^0$.

a) Tính MN và SO.

b) Tính góc giữa MN và (SBD).

Bài tập 6: Cho hình chóp SABCD, có đáy ABCD là hình vuông cạnh a; SA ⊥ (ABCD) và SA = a$\sqrt{6}$. Tính góc giữa:

a) SC và (ABCD) b) SC và (SAB) c) SB và (SAC) d) AC và (SBC)

Bài tập 7: Cho lăng trụ ABC.A′B′C′, có đáy là tam giác đều cạnh a, AA′ ⊥ (ABC). Đường chéo BC′ của mặt bên BCC′B′ hợp với (ABB′A′) góc 30^0.

a) Tính AA′.

b) Gọi N là trung điểm của cạnh BB′. Tính góc giữa MN và (BA′C′).

Bài tập 8: Cho lăng trụ ABC.A′B′C′, có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A; AA′ ⊥ (ABC). Đoạn nối trung điểm M của AB và trung điểm N của B′C′ có độ dài bằng a, MN hợp với đáy góc α và mặt bên BCC′B′ góc β.

a) Tính các cạnh đáy và cạnh bên của lăng trụ theo a và α.

b) Chứng minh rằng: $\cos\alpha = \sqrt{2}\sin\beta$.

Bài tập 9: Cho hình chóp SABC, có đáy ABC là tam giác vuông cân với BA = BC = a; SA ⊥ (ABC) và SA = a. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC.

a) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC).

b) Tính góc giữa 2 mặt phẳng (SEF) và (SBC).

Bài tập 10: Cho hình chóp SABCD, có đáy ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính AB = 2a; SA ⊥ (ABCD) và SA = a$\sqrt{3}$.

a) Tính góc giữa 2 mặt phẳng (SAD) và (SBC).

b) Tính góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Bài tập 11: Cho hình vuông ABCD cạnh a, SA $\perp$ (ABCD) và SA = $a\sqrt{3}$. Tính góc giữa các cặp mặt phẳng sau:

a) (SBC) và (ABC) b) (SBD) và (ABD) c) (SAB) và (SCD)

Bài tập 12: Cho hình thoi ABCD cạnh a, tâm O, OB = $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; SA $\perp$ (ABCD) và SO = $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

a) Chứng minh ASC vuông.

b) Chứng minh hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) vuông góc.

c) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

III. Các dạng toán về khoảng cách

3.1.Dạng 1: Khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng

3.1.1. Cách xác định khoảng cách từ điểm M đến mp(P)

Cách 1:

+ Tìm mp(Q) chứa M và vuông góc với mp(P) theo giao tuyến Δ

+ Từ M hạ MH vuông góc với Δ ($H \in \Delta$)

+ MH = d(M,(P))

Cách 2:

+ Kẻ Δ//(P). Ta có: d(M,(P))= d(Δ,(P))

+ Chọn $N \in \Delta$. Lúc đó, $d(M,(P)) = d(\Delta,(P)) = d(N,(P))$

Cách 3:

+ Nếu $MN \cap (P) = I$. Ta có: $\dfrac{\mathrm{d}\left(\mathrm{M},(\mathrm{P})\right)}{\mathrm{d}\left(N,(\mathrm{P})\right)} = \dfrac{MI}{NI}$

+ Tính $\mathrm{d}\left(N,(\mathrm{P})\right)$ và $\dfrac{MI}{NI}$

+ $\mathrm{d}\left(\mathrm{M},(\mathrm{P})\right) = \dfrac{MI}{NI}.\mathrm{d}\left(N,(\mathrm{P})\right)$

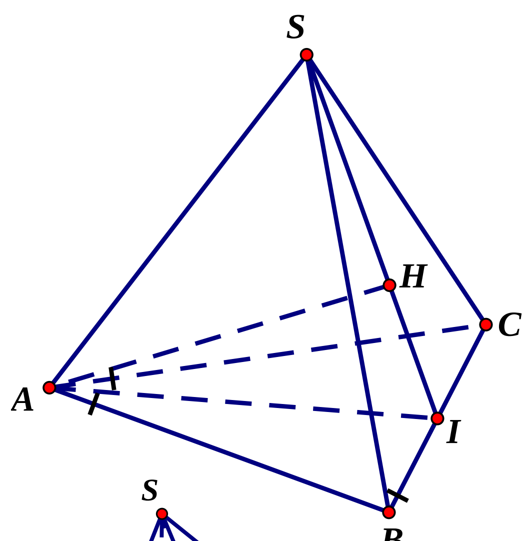
Chú ý: *Điểm N ở đây ta phải chọn sao cho tìm khoảng cách từ N đến mặt phẳng (P) dễ hơn tìm khoảng cách từ M đến mp(P).*

3.1.2. Các ví dụ mẫu

***) Ví dụ cho cách 1:**

Ví dụ 1: Cho hình chóp đều S.ABC, đáy ABC có cạnh bằng a, mặt bên tạo với đáy một góc α. Tính $d(A,(SBC))$ theo a và α.

Giải: **+** Gọi I là trung điểm của BC.



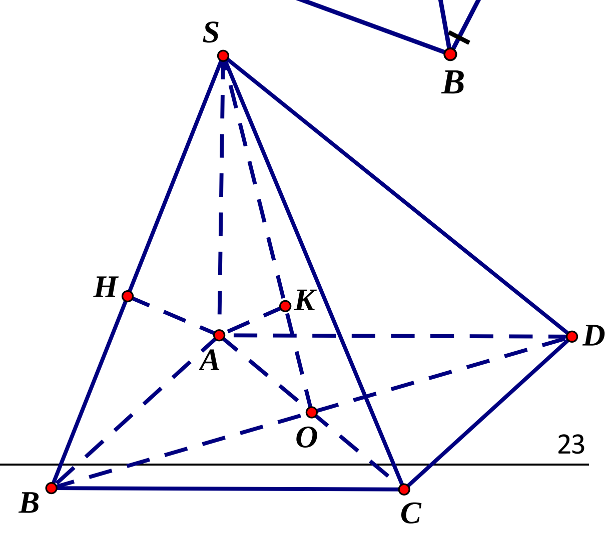
+ Ta có: $\left.\begin{matrix} SI \perp BC \\ AI \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAI)$ và $\widehat{SIA} = \alpha$

+ Kẻ $AH \perp SI$ (H ∈ SI) mà $SI = (SAI) \cap (SBC)$ nên $AH \perp (SBC)$. Do đó, $d(A,(SBC)) = AH$

+ Mặt khác, xét tam giác vuông AHI có:

$$AH = AI.\sin\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\sin\alpha$$

Vậy, $d(A,(SBC)) = AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\sin\alpha$



Ví dụ 2: Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$, SA=2a,

a) Tính $d(A,(SBC))$

b) Tính $d(A,(SBD))$

Giải: a) Kẻ $AH \perp SB$ $(\mathrm{H} \in \mathrm{SB})$ (1)

Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$ (*) và $AB \perp BC$ (gt) (**). Từ (*) và (**) suy ra: $BC \perp (SAB) \Rightarrow \mathrm{BC} \perp \mathrm{AH}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $AH \perp (SBC)$ hay $d(A,(SBC)) = AH$

+ Mặt khác, xét tam giác vuông SAB có: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{5}{4a^2} \Rightarrow AH = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$.

Vậy, $d(A,(SBC)) = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$

b) Gọi $O = AC \cap BD$

Kẻ $AK \perp SB$ $(\mathrm{K} \in \mathrm{SO})$ (1)

Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$ (*) và $AC \perp BD$ (gt) (**). Từ (*) và (**) suy ra: $BD \perp (SAC) \Rightarrow \mathrm{BC} \perp \mathrm{AK}$ (2).

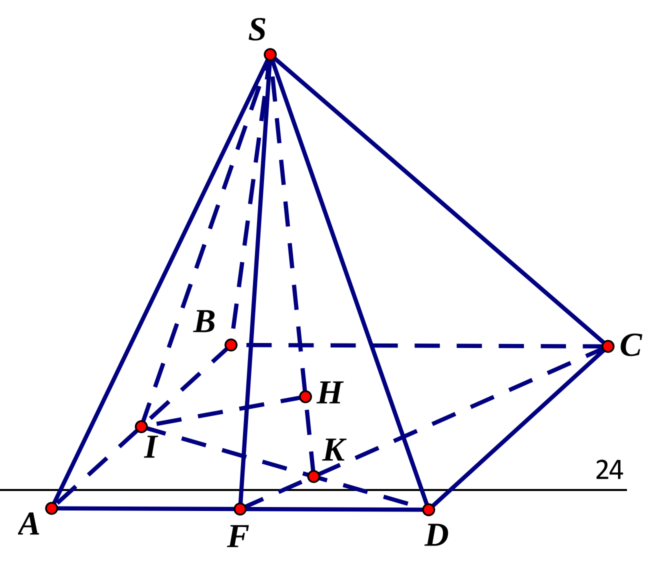
Từ (1) và (2) ta có: $AK \perp (SBD)$ hay $d(A,(SBD)) = AK$

+ Mặt khác, xét tam giác vuông SAO có: $\dfrac{1}{AK^2} = \dfrac{1}{AO^2} + \dfrac{1}{SA^2} = \dfrac{9}{4a^2} \Rightarrow AK = \dfrac{2a}{3}$.

Vậy, $d(A,(SBD)) = \dfrac{2a}{3}$.

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tam giác SAB đều, $(SAB) \perp (ABCD)$. Gọi I, F lần lượt là trung điểm của AB và AD. Tính $d(I,(SFC))$

Giải: Gọi $K = FC \cap ID$



+ Kẻ $IH \perp SK$ (H ∈ K) (1)

+ Ta có: $\left.\begin{array}{l}(SAB)\perp(ABCD)\\(SAB)\cap(ABCD)=AB\\SI\subset(SAB)\\SI\perp AB\end{array}\right\}\Rightarrow SI\perp(ABCD)$

$\Rightarrow SI \perp FC$ (*)

+ Mặt khác, Xét hai tam giác vuông AID và DFC có: AI=DF, AD=DC. Suy ra,

$\Delta AID = \Delta DFC \Rightarrow AID = DFC, ADI = DCF$ mà

$AID + ADI = 90^0 \Rightarrow DFC + ADI = 90^0$ hay $FC \perp ID$ (**)

+ Từ (*) và (**) ta có: $FC \perp (SID) \Rightarrow IH \perp FC$ (2). Từ (1) và (2) suy ra: $IH \perp (SFC)$ hay $d(I,(SFC)) = IH$

+ Ta có: $SI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}, ID = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1}{DK^2} = \dfrac{1}{DC^2} + \dfrac{1}{DF^2} = \dfrac{5}{a^2} \Rightarrow DK = \dfrac{a\sqrt{5}}{5}$

$\Rightarrow IK = ID - DK = \dfrac{3a\sqrt{5}}{10}$

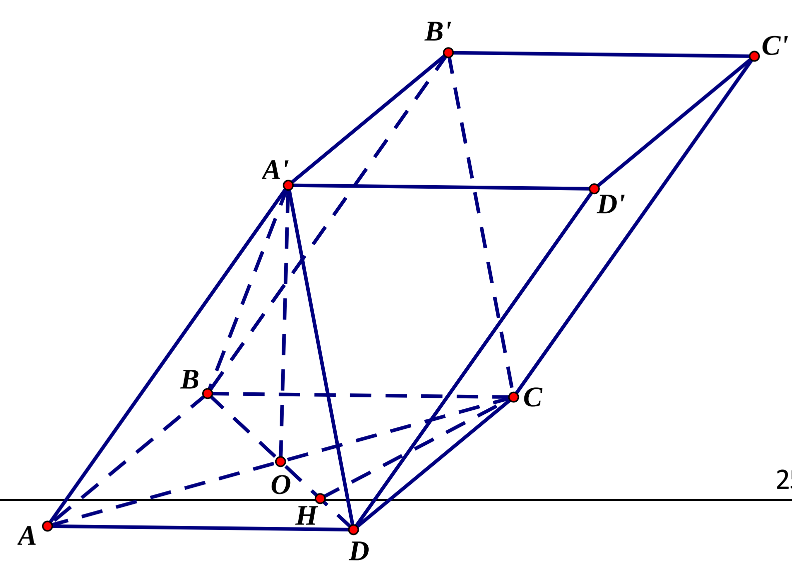
Do đó, $\dfrac{1}{IH^2} = \dfrac{1}{SI^2} + \dfrac{1}{IK^2} = \dfrac{32}{9a^2} \Rightarrow IH = \dfrac{3a\sqrt{2}}{8}$. Vậy, $d(I,(SFC)) = \dfrac{3a\sqrt{2}}{8}$

***) Ví dụ cho cách 2:**

Ví dụ 1: (B-2011) Cho lăng trụ ABCD.A’B’C’D’, ABCD là hình chữ nhật, $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của A’ trên (ABCD) trùng với giao điểm của AC và BD. Tính $d(B',(A'BD))$

Giải: + Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Vì B’C//A’D nên B’C//(A’BD). Do đó,



$d(B',(A'BD)) = d(B'C,(A'BD)) = d(C,(A'BD))$ + Trong mặt phẳng (ABCD) kẻ $CH \perp BD$, $(H \in BD)$ (1). Mặt khác, $A'O \perp (ABCD) \Rightarrow A'O \perp CH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $CH \perp (A'BD) \Rightarrow d(B',(A'BD)) = CH$

+ Xét tam giác vuông BCD có: $\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{CD^2} = \frac{4}{3a^2} \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vậy: $d(B',(A'BD)) = CH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

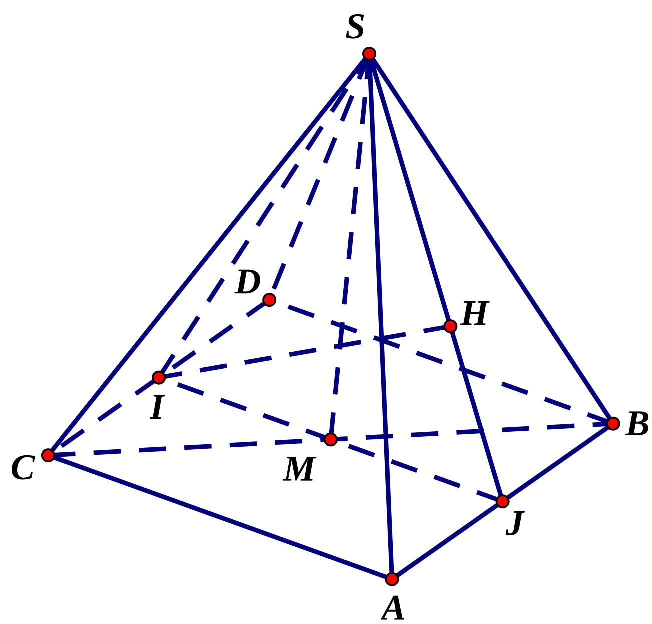
Ví dụ 2: (A-2013) Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $ABC = 30^0$, ΔSBC là tam giác đều cạnh a, $(SBC) \perp (ABC)$. Tính $d(C,(SAB))$

Giải: + Trong mặt phẳng (ABC) vẽ hình chữ nhật ABDC. Gọi M, I, J lần lượt là trung điểm của BC, CD và AB. Lúc đó, CD//(SAB) hay

$d(C,(SAB)) = d(CD,(SAB)) = d(I,(SAB))$

+ Trong mặt phẳng (SIJ) kẻ

$IH \perp SJ$, $(H \in SJ)$ (1)



Mặt khác, ta có:

$$\left.\begin{array}{l} IJ \perp AB \\ SM \perp (ABC) \Rightarrow AB \perp SM \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow AB \perp (SIJ) \Rightarrow AB \perp IH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $IH \perp (SAB)$ hay

$d(C,(SAB)) = IH$

+ Xét tam giác SIJ có: $S_{SIJ} = \frac{1}{2} IH.SJ = \frac{1}{2} SM.IJ \Rightarrow IH = \frac{SM.IJ}{SJ}$. Với:

$IJ = AC = BC.\sin 30^0 = \frac{a}{2}$, $SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $SJ = \sqrt{SM^2 + MJ^2} = \frac{a\sqrt{13}}{4}$.

Do đó: $IH = \dfrac{SM.IJ}{SJ} = \dfrac{a\sqrt{39}}{13}$. Vậy $d(C,(SAB)) = \dfrac{a\sqrt{39}}{13}$

***) Ví dụ cho cách 3:**

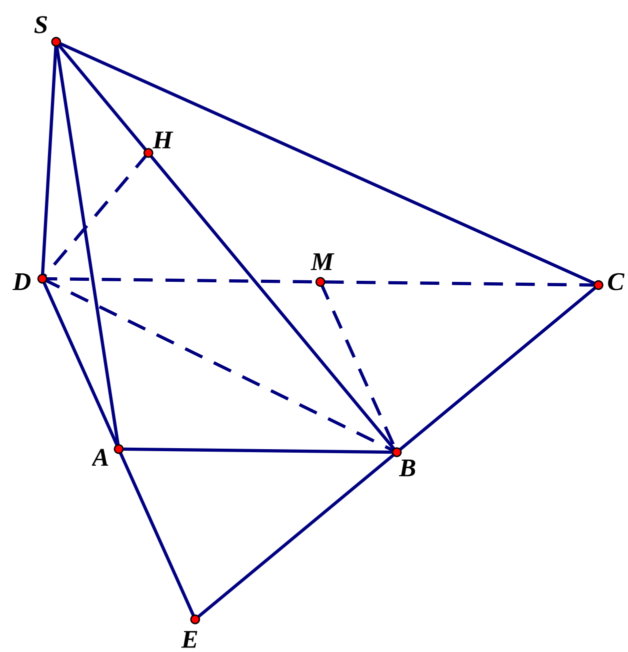
Ví dụ 1: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D, AB=AD=a, CD=2a, $SD \perp (ABCD)$, SD=a.

a) Tính $d(D,(SBC))$

b) Tính $d(A,(SBC))$

Giải: Gọi M là trung điểm của CD, E là giao điểm của hai đường thẳng AD và BC.

a) Trong mặt phẳng (SBD) kẻ $DH \perp SB$, $(\text{H} \in \text{SB})\ (1)$.



+ Vì $BM = AD = \dfrac{1}{2}CD \Rightarrow$ Tam giác BCD vuông tại B hay $BC \perp BD$ (*). Mặt khác, vì $SD \perp (ABCD) \Rightarrow SD \perp BC$ (**). Từ (*) và (**) ta có: $BC \perp (SBD) \Rightarrow BC \perp DH$ (2). Từ (1) và (2) suy ra: $DH \perp (SBC)$ hay $d(D,(SBC)) = DH$

+ Xét tam giác vuông SBD có:

$\dfrac{1}{DH^2} = \dfrac{1}{SD^2} + \dfrac{1}{BD^2} = \dfrac{3}{2a^2} \Rightarrow DH = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

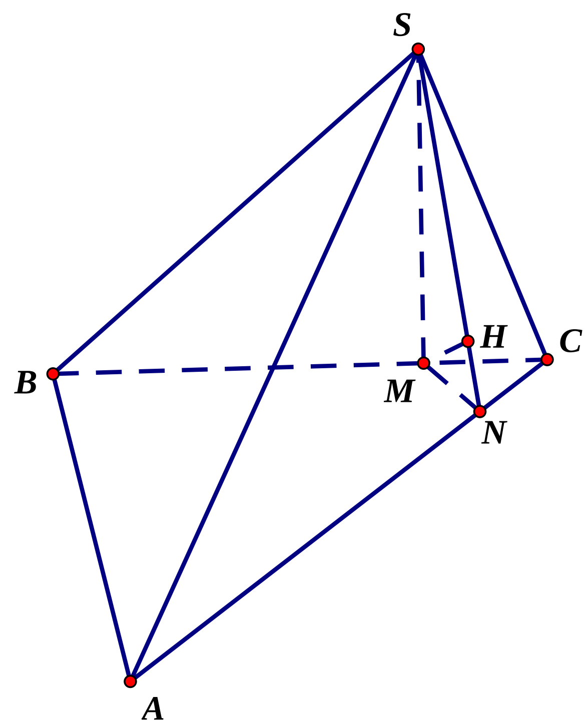
Vậy, $d(D,(SBC)) = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

b) Ta có: $\dfrac{d(A,(SBC))}{d(D,(SBC))} = \dfrac{AE}{DE} = \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow d(A,(SBC)) = \dfrac{1}{2}d(d,(SBC)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy, $d(A,(SBC)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Ví dụ 3: (D-2011) Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, BA=3a, BC=4a, $(SBC) \perp (ABC), SB = 2a\sqrt{3}, SBC = 30^0$. Tính $d(B,(SAC))$

Giải: + Trong mặt phẳng (SBC) kẻ $SM \perp BC$ $(M \in BC)$; trong mặt phẳng (ABC) kẻ $MN \perp AC$ $(N \in AC)$; trong mặt phẳng (SMN) kẻ $MH \perp SN$ $(N \in SN)$. Suy ra, $MH \perp (SAC) \Rightarrow d(M,(SAC)) = MH$



+ Ta có: $SM = SB.\sin 30^0 = a\sqrt{3}$,

$BM = SB.\cos 30^0 = 3a \Rightarrow CM = a$,

$MN = \dfrac{AB.CM}{AC} = \dfrac{3a}{5}$. Xét tam giác vuông SMN có:

$$\frac{1}{MH^2} = \frac{1}{SM^2} + \frac{1}{MN^2} = \frac{28}{9a^2} \Rightarrow MH = \frac{3a}{\sqrt{28}}$$

$$\Rightarrow d(M,(SAC)) = \frac{3a}{\sqrt{28}}$$

+ Mặt khác, ta có:

$$\frac{d(B,(SAC))}{d(M,(SAC))} = \frac{BC}{MC} = 4$$

$$\Rightarrow d(B,(SAC)) = 4.d(M,(SAC)) = \frac{6a}{\sqrt{7}}$$

Vậy $d(B,(SAC)) = \dfrac{6a}{\sqrt{7}}$.

3.2.Dạng 2: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

3.2.1. Cách tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau d và d'

Cách 1:

+ Xác định đường thẳng vuông góc chung của d và d'

+ Tính độ dài đoạn vuông góc chung.

Cách 2:

+Tìm mp(P) chứa d' và song song với d

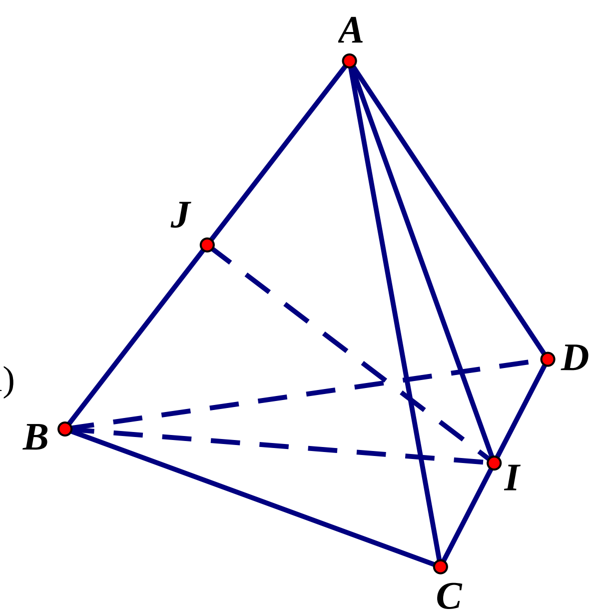
+ Khi đó $d(d,d') = d(d,(P)) = d(A,(P))$ với A là một điểm bất kỳ thuộc d

Chú ý: *mp(P) có thể có sẵn hoặc chúng ta phải dựng (Cách dựng: qua một điểm $B \in d'$ dựng đường thẳng Δ song song với d, lúc đó mp(P)≡(d',Δ)).*

3.2.2. Các ví dụ mẫu

***) Ví dụ cho cách 1**

Ví dụ 1: Cho tứ diện ABCD có AB=a, tất cả các cạnh còn lại bằng 3a. Tính $d(AB,CD)$



Giải:

+ Gọi I, J lần lượt là trung điểm của CD và AB.

+ Vì ACD và ACD là các tam giác đều nên:
$CD \perp AI, CD \perp BI \Rightarrow CD \perp (AIB) \Rightarrow CD \perp IJ$ (1)
Mặt khác, $\Delta ACD = \Delta ACD$ nên tam giác AIB cân tại I. Do đó, $IJ \perp AB$ (2)

+ Từ (1), (2) suy ra: IJ là đường vuông góc chung của AB và CD.

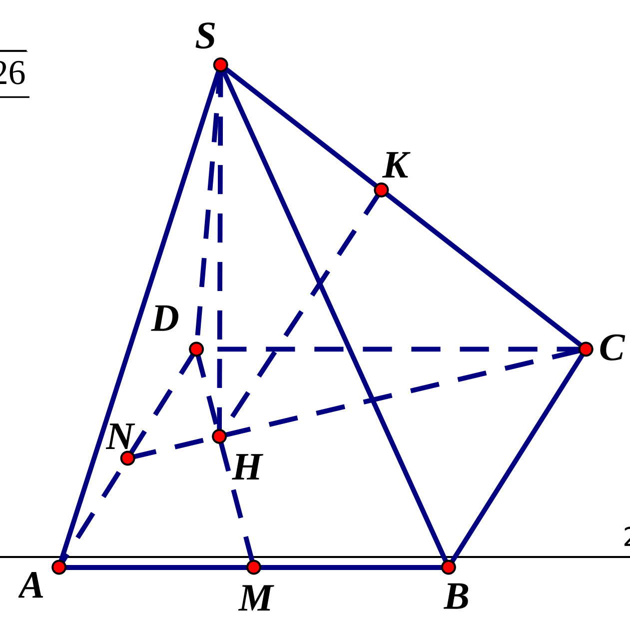
+ Ta có:

$$IJ = \sqrt{AI^2 - AJ^2} = \sqrt{\left(\frac{3a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{26}}{2}$$

.

Vậy $d(AB,CD) = \dfrac{a\sqrt{26}}{2}$

Ví dụ 2: (A_2010) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi M,



N lần lượt là trung điểm của AB và AD, H là giao điểm của CN và DM, $SH \perp (ABCD), SH = a\sqrt{3}$. Tính $d(DM, SC)$

Giải: + Trong mp(SCH) kẻ $HK \perp SC(1)$, $(K \in SC)$.

+ Mặt khác, $\left.\begin{matrix} SH \perp (ABCD) \\ DM \subset (ABCD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow SH \perp DM \ (*)$

Xét hai tam giác vuông AMD và DNC có AM=DN, AD=DC $\Rightarrow \Delta AMD = \Delta DNC$. Từ đó ta

có: $\left.\begin{matrix} AMD = DNC \\ ADM = DCN \\ AMD + ADM = 90^0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow DNC + ADM = 90^0 \Rightarrow NHD = 90^0$ hay $DM \perp CN$ (**).

Từ (*), (**) suy ra: $DM \perp (SCH) \Rightarrow DM \perp HK$ (2).

Từ (1), (2) suy ra: HK là đoạn vuông góc chung của DM và SC.

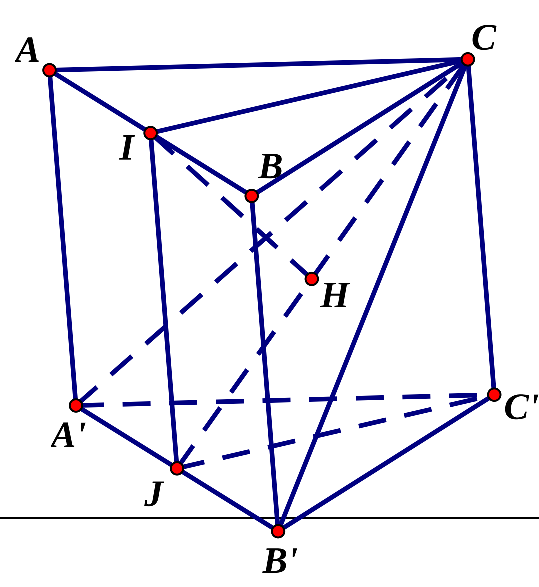
+ Ta có: $\Delta HCD \sim \Delta DCN \Rightarrow HC = \dfrac{CD^2}{CN} = \dfrac{a^2}{\sqrt{CD^2 - DN^2}} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Xét tam giác vuông SHC ta có: $\dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1}{HC^2} + \dfrac{1}{HS^2} = \dfrac{5}{3a^2} \Rightarrow HK = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$

Vậy $d(DM, SC) = HK = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$

***) Ví dụ cho cách 2**

Ví dụ 1: Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C', đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $AA' = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính $d(AB, CB')$



<u>Giải</u>: + Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và A'B'.

+ Ta có: $AB//(CA'B') \Rightarrow d(AB,CB') = d(AB,(CA'B')) = = d(I,(CA'B'))$ + Trong mp(CIJ) kẻ $IH \perp CJ$ (1), $(H \in CJ)$

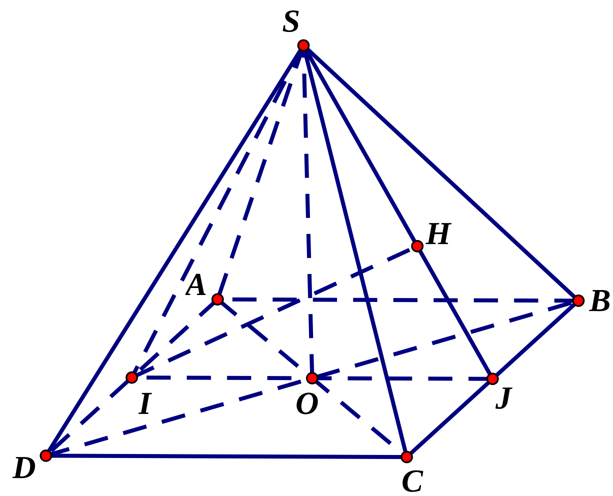
Ta có: $A'B' \perp (IJ)$ (vì ABC. A'B'C' là hình lăng trụ đứng) và $IC \perp A'B'$ (vì ΔABC là tam giác đều) nên $A'B' \perp (CIJ) \Rightarrow IH \perp A'B'$ (2).

Từ (1), (2) suy ra: $IH \perp (CA'B')$ hay $d(AB,CB') = IH$

+ Xét tam giác vuông CIJ có: $\frac{1}{IH^2} = \frac{1}{IC^2} + \frac{1}{IJ^2} = \frac{4}{3a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{10}{3a^2} \Rightarrow IH = \frac{a\sqrt{30}}{10}$

Vậy $d(AB,CB') = IH = \frac{a\sqrt{30}}{10}$

Ví dụ 2: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Tính $d(AD,SB)$



<u>Giải</u>: + Vì $AD//(SBC) \Rightarrow d(AD,SB) = d(AB,(SBC))$

+ Gọi O là giao điểm của AC và BD. I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC.

+ Trong mp(SIJ) kẻ $IH \perp SJ, (H \in SJ)$ (1).

Theo giả thiết ta có:

$$\left.\begin{array}{l} SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BC \\ IJ // AB \Rightarrow IJ \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SIJ)$$

$\Rightarrow IH \perp BC$ (2)

Từ (1), (2) suy ra: $IH \perp (SBC)$ hay $d(AD,SB) = IH$

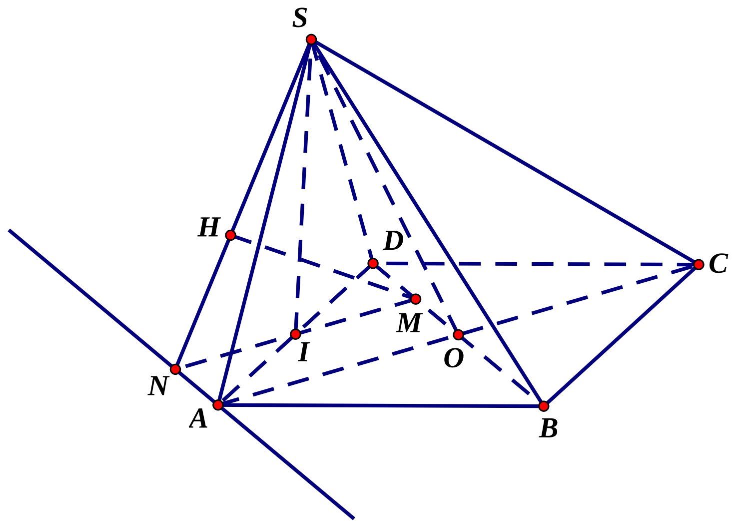
+ Xét tam giác SIJ có: $S_{SIJ} = \frac{1}{2} IH.SJ = \frac{1}{2} SO.IJ \Rightarrow IH = \frac{SO.IJ}{SJ}$. Với: $IJ = a$,

$SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = a.\sqrt{\frac{3}{2}}, SJ = \sqrt{SB^2 - BJ^2} = \frac{a.\sqrt{7}}{4}$. Suy ra: $IH = \frac{SO.IJ}{SJ} = \frac{2a\sqrt{21}}{7}$.

Vậy $d(AD,SB)=IH=\dfrac{2a\sqrt{21}}{7}$

Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tam giác SAD là tam giác đều, (SAD) vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính $d(SA,BD)$

Giải: + Qua A kẻ đường thẳng d song song với BD. Gọi O là giao điểm của AC và BD; I, M lần lượt là trung điểm của AD và OD; N là giao điểm của d và IM.



+ Ta có:
$d(SA,BD)=d((SA,d),BD)=$
$=d(M,(SA,d))$

+ Trong mp(SMN) kẻ
$MH\perp SN$ (1), (H $\in$ SN)

Theo giả thiết: $\left.\begin{matrix} SI\perp AD \\ (SAD)\perp(ABCD)\end{matrix}\right\}\Rightarrow SI\perp(ABCD)\Rightarrow SI\perp d$ (*) Mặt khác ta có:

$\left.\begin{matrix} d//BD \\ BD\perp AO \\ AO//MN\end{matrix}\right\}\Rightarrow d\perp MN$ (**). Từ (*), (**) suy ra: $d\perp(SMN)\Rightarrow d\perp MH$ (2) . Từ (1), (2) suy ra: $MH\perp(SA,d)$.

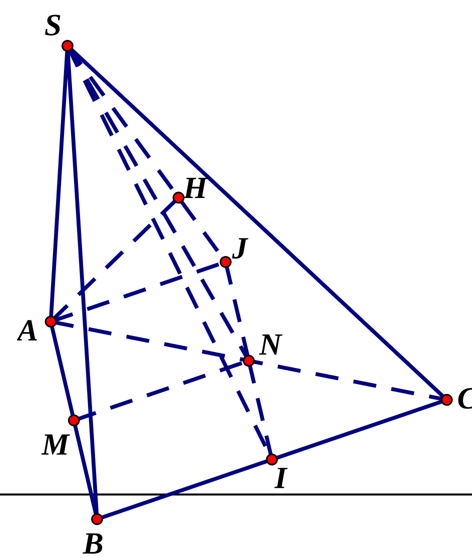
+ Xét tam giác SMN có: $S_{SMN}=\dfrac{1}{2}MH.SN=\dfrac{1}{2}SI.MN\Rightarrow MH=\dfrac{SI.MN}{SN}$ với

$SI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}, MN=AO=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}, SN=\sqrt{SI^2-IN^2}=\dfrac{a\sqrt{10}}{4}$

. Do đó, $MH=\dfrac{SI.MN}{SN}=\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$. Vậy

$d(SA,BD)=\dfrac{a\sqrt{15}}{5}$

Ví dụ 4: (A-2011) Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tai B, AB=BC=2a, hai mặt phẳng



(SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB, mặt phẳng qua SM và song song với BC cắt AC tại N, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^0. Tính $d(AB,SN)$

<u>Giải</u>: + Gọi I là trung điểm của BC.

Do MN//BC nên N là trung điểm của AC. Do đó, IN//AB hay $d(AB,SN)=d(AB,(SNI))$.

+ Trong mp(ABC) kẻ $AJ\perp IN,(J\in IN)$ (*)

Trong mp(SAJ) kẻ $AH\perp SJ,(H\in SJ)$ (1)

+ Theo giải thiết ta có: $\left.\begin{matrix}(SAB)\perp(ABC)\\(SAC)\perp(ABC)\end{matrix}\right\}\Rightarrow SA\perp(ABC)\Rightarrow SA\perp IN$ (**)

Từ (*), (**) ta có: $IN\perp(SAJ)\Rightarrow IN\perp AH$ (2). Từ (1), (2) ta có:
$AH\perp(SIN)\Rightarrow d(AB,SN)=AH$.

+ Ta có: $((SBC),(ABC))=SBA=60^0\Rightarrow SA=AB.\tan 60^0=2a\sqrt{3}$; $AJ=BI=a$.

+ Xét tam giác vuông SAJ có: $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AJ^2}=\dfrac{13}{12a^2}\Rightarrow AH=a.\sqrt{\dfrac{12}{13}}$.

Vậy $d(AB,SN)=AH=\dfrac{a.\sqrt{156}}{13}$

3.3. Bài tập

Bài tập 1: Cho hình chóp S.ABCD, SA=a, các cạnh còn lại bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Chứng minh: $SA\perp SC$. Tính $d(S,(ABCD))$

Bài tập 2: (D-2009) Cho hình lăng trụ đứng ABC.A’B’C’, đáy ABC là tam giác vuông tại B, AB=a, AA’=2a. Gọi M là trung điểm của A’C’, I là giao điểm của AM và A’C. Tính $d(A,(IBC))$

Bài tập 3: Cho hình chóp SABC, $SA=3a, SA\perp(ABC), AB=2a, ABC=120^0$. Tính $d(A,(SBC))$

Bài tập 4: (D-2007) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang , $ABC = BAD = 90^0$, BA=BC=a, AD=2a, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu của A trên SB. Chứng minh rằng tam giác SCD vuông và tính $d(H,(SCD))$

Bài tập 5: Cho hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là hình thoi tâm O cạnh a, $BCD = 60^0$ đường cao SO=a. Tính $d(AD, SB)$

Bài tập 6: (D-2008) Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, BA=BC=a, $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính $d(AM, B'C)$

Bài tập 7: (B-2007) Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, E là điểm đối xứng với D qua trung điểm của SA. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AE và BC. Chứng minh rằng: $MN \perp BD$. Tính $d(MN, AC)$

Bài tập 8: Cho hình tứ diện OABC, trong đó OA, OB, OC = a. Gọi I là trung điểm của BC. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng:

a) OA và BC. b) AI và OC.

Bài tập 9: Cho hình chóp SABCD, đáy ABCD là hình vuông tâm O, cạnh a, SA ⊥ (ABCD) và SA = a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

a) SC và BD. b) AC và SD.

Bài tập 10: Cho tứ diện SABC có SA ⊥ (ABC). Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC.

a) Chứng minh ba đường thẳng AH, SK, Bc đồng qui.

b) Chứng minh SC ⊥ (BHK), HK ⊥ (SBC).

c) Xác định đường vuông góc chung của BC và SA.

Bài tập 11: a) Cho tứ diện ABCD. Chứng minh rằng nếu AC = BD, AD = BC thì dường vuông góc chung của AB và CD là đường nối các trung điểm I, K của hai cạnh AB và CD .

b) Chứng minh rằng nếu đường thẳng nối các trung điểm I, K của hai cạnh AB và CD của tứ diện ABCD là đường vuông góc chung của AB và CD thì AC = BD, AD = BC.

Bài tập 12: Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a, I là trung điểm của AB. Dựng IS ⊥ (ABCD) và IS = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, SD, SB. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng:

a) NP và AC b) MN và AP.

Bài tập 13: Cho hình chóp SABCD, có SA ⊥ (ABCD) và SA = a$\sqrt{6}$, đáy ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kinh AD = 2a.

a) Tính các khoảng cách từ A và B đến mặt phẳng (SCD).

b) Tính khoảng cách từ đường thẳng AD đến mặt phẳng (SBC).

c) Tính diện tích của thiết diện của hình chóp SABCD với mặt phẳng (P) song song với mp(SAD) và cách (SAD) một khoảng bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Bài tập 14: Cho hình lăng trụ ABC.A′B′C′ có AA′ ⊥ (ABC) và AA′ = a, đáy ABC là tam giác vuông tại A có BC = 2a, AB = a$\sqrt{3}$.

a) Tính khoảng cách từ AA′ đến mặt phẳng (BCC′B′).

b) Tính khoảng cách từ A đến (A′BC).

c) Chứng minh rằng AB ⊥ (ACC′A′) và tính khoảng cách từ A′ đến mặt phẳng (ABC′).

Bài tập 15: Cho hình chóp SABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA ⊥ (ABCD) và SA = 2a.

a) Tính khoảng cách từ A đến mp(SBC), từ C đến mp(SBD).

b) M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD. Chứng minh rằng MN song song với (SBD) và tính khoảng cách từ MN đến (SBD).

c) Mặt phẳng (P) qua BC cắt các cạnh SA, SD theo thứ tự tại E, F. Cho biết AD cách (P) một khoảng là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (P) và diện tích tứ giác BCFE.

Bài tập 16: Cho hai tia chéo nhau Ax, By hợp với nhau góc 60^0, nhận AB = a làm đoạn vuông góc chung. Trên By lấy điểm C với BC = a. Gọi D là hình chiếu của C trên Ax.

a) Tính AD và khoảng cách từ C đến mp(ABD).

b) Tính khoảng cách giữa AC và BD.

Bài tập 17: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a và $BAD = 60^0$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Đường thẳng SO ⊥ (ABCD) và SO = $\frac{3a}{4}$. Gọi E là trung điểm của BC, F là trung điểm của BE.

a) Chứng minh (SOF) ⊥ (SBC).

b) Tính các khoảng cách từ O và A đến (SBC).

C. KẾT LUẬN

Qua đề tài này, một lần nữa chúng ta có thể khẳng định về tầm quan trọng của hình học không gian đối với Toán học nói chung và Toán học phổ thông nói riêng. Việc tiếp thu tốt phần này đòi hỏi người học có tính tưởng tượng phong phú, ngoài ra giáo viên cần trang bị cho các em một lớp các dạng toán và cách giải tương ứng.

Trên đây là một số kinh nghiệm của bản thân được đúc kết trong quá trình giảng dạy, sẽ có nhiều thiếu sót mong quý thầy cô đóng góp ý kiến để cho đề tài được hoàn thiện và đi vào áp dụng.

Xin chân thành cảm ơn!

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Anh Trường (2013), *Tài liệu tổng ôn tập hình học không gian*. Nhà xuất bản đại học quốc gia hà nội.

2. Trần Văn Thương, Phạm Đình, Lê Văn Đỗ, Cao Quang Đức (2001), *Phân loại và phương pháp giải toán hình học không gian*. Nhà xuất bản đại học quốc gian Thành phố Hồ Chí Minh.

3. diendantoanhoc.net

Đồng hới, ngày 09 tháng 05 năm 2014

Người viết sáng kiến kinh nghiệm:

Lê Duy Hiền

Ý KIẾN VÀ XẾP LOẠI CỦA TỔ TOÁN:

Ý KIẾN VÀ XẾP LOẠI CỦA HĐKH NHÀ TRƯỜNG: